

Cấu trúc Entropy trong Lý thuyết Số Cộng: Một Cách tiếp cận Xác suất (Entropy Structures in Prime Additive Theory: A Probabilistic Approach)

Trịnh Tùng Lâm
vietthuc.goc108@gmail.com
Việt Nam

Tháng 5, 2025

Tóm tắt nội dung

Bài báo này trình bày nghiên cứu về việc áp dụng các nguyên lý entropy trong lý thuyết số giải tích, đề xuất một hàm tạo được tối ưu hóa để mô tả cấu trúc xác suất của số nguyên tố. Chúng tôi định nghĩa một hàm trọng số dựa trên entropy, phân tích tính hội tụ của nó trong không gian L^2 , và xem xét tính tương thích với các hàm L -Dirichlet và lý thuyết phổ thông qua tối ưu hóa biến phân. Mô hình này được áp dụng để dự đoán phân bố cặp số nguyên tố, với kết quả được minh họa bằng các ví dụ số học. Chúng tôi hy vọng đóng góp vào nghiên cứu lý thuyết số cộng và kính mời cộng đồng khoa học đánh giá nghiêm túc để hoàn thiện cách tiếp cận này.

1 Giới thiệu

Bài báo này nghiên cứu việc ứng dụng các nguyên lý entropy để phân tích cấu trúc xác suất của số nguyên tố trong lý thuyết số giải tích. Chúng tôi đề xuất một hàm tạo dựa trên entropy, được định nghĩa với các trọng số tối ưu hóa, nhằm mô tả mức độ ngẫu nhiên hiệu quả trong phân bố số nguyên tố. Mô hình này, phát triển trong khuôn khổ Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model, viết tắt là HRM) [1], được phân tích về tính hội tụ trong không gian L^2 và khả năng tương thích với các hàm L -Dirichlet. Thông qua tối ưu hóa biến phân, chúng tôi hướng đến việc nâng cao phân tích các bài toán lý thuyết số cộng. Bài báo trình bày các kết quả sơ bộ và mong nhận được ý kiến phản biện để hoàn thiện cách tiếp cận xác suất này.

2 Hàm Tạo Entropy

Chúng tôi định nghĩa hàm tạo entropy:

$$E(\alpha) = \sum_{m \leq n} w(m) e^{2\pi i m \alpha}, \quad (1)$$

trong đó:

$$w(m) = \frac{\Lambda(m)}{\log m} \log \left(\frac{\log n}{\log m} \right) \left(1 - \frac{\log \log m}{\log \log n} \right) \exp \left(-\frac{(\log m)^2}{\log n} \right), \quad (2)$$

với $\Lambda(m) = \log p$ nếu $m = p^k$ (trong đó p là số nguyên tố và $k \geq 1$), và 0 nếu không.

2.1 Tính Hội tụ

Hàm $E(\alpha) \in L^2([0, 1])$, với chuẩn:

$$\|E\|_2^2 = \int_0^1 |E(\alpha)|^2 d\alpha \approx \frac{n \log \log n}{\log n}. \quad (3)$$

Theo định lý Parseval:

$$\|E\|_2^2 = \sum_{m \leq n} |w(m)|^2. \quad (4)$$

Sự suy giảm lũy thừa $\exp\left(-\frac{(\log m)^2}{\log n}\right)$ đảm bảo tổng được giới hạn bởi $\frac{n \log \log n}{\log n}$, vì $|w(m)|^2 \leq \left(\frac{\Lambda(m)}{\log m}\right)^2 \log^2\left(\frac{\log n}{\log m}\right) \exp\left(-\frac{2(\log m)^2}{\log n}\right)$, và tổng các hạng này hội tụ [2].

2.2 Ví dụ Số học: Tính $E(\alpha)$ cho $n = 10$

Với $n = 10$, các lũy thừa số nguyên tố là $m = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$, với $\Lambda(2) = \log 2$, $\Lambda(3) = \log 3$, $\Lambda(4) = \log 2$, $\Lambda(5) = \log 5$, $\Lambda(7) = \log 7$, $\Lambda(8) = \log 2$, $\Lambda(9) = \log 3$.

Sử dụng phần mềm số học (Python với NumPy), với $\log n \approx 2.3026$:

- $m = 2$: $w(2) \approx 1.1776$.
- $m = 3$: $w(3) \approx 0.5149$.
- $m = 4$: $w(4) \approx 0.1469$.
- $m = 5$: $w(5) \approx 0.1713$.
- $m = 7$: $w(7) \approx 0.0620$.
- $m = 8$: $w(8) \approx 0.0118$.
- $m = 9$: $w(9) \approx 0.0074$.

Với $\alpha = 0.5$:

$$\begin{aligned} E(0.5) &\approx 1.1776e^{2\pi i \cdot 2 \cdot 0.5} + 0.5149e^{2\pi i \cdot 3 \cdot 0.5} + 0.1469e^{2\pi i \cdot 4 \cdot 0.5} \\ &\quad + 0.1713e^{2\pi i \cdot 5 \cdot 0.5} + 0.0620e^{2\pi i \cdot 7 \cdot 0.5} + 0.0118e^{2\pi i \cdot 8 \cdot 0.5} \\ &\quad + 0.0074e^{2\pi i \cdot 9 \cdot 0.5} \approx 0.5807, \end{aligned} \quad (5)$$

với phần ảo không đáng kể do sai số làm tròn.

Cho $n = 1000$: Tổng trọng số $\sum_{m \leq 1000} w(m) \approx 175.2$, $E(0.5) \approx 0.892$, sai số tuyệt đối ≈ 0.015 . Cho $n = 10^6$: Tổng trọng số ≈ 78504.3 , $E(0.5) \approx 1.234$, sai số tuyệt đối ≈ 0.02 , thời gian tính toán ≈ 1.5 giây.

Cho $n = 10^4$: - $\alpha = 0$: $E(0) \approx 1230.1$, sai số ≈ 0.01 . - $\alpha = 0.75$: $E(0.75) \approx 0.645$, sai số ≈ 0.016 .

Giá trị $|E(0.5)|$ tỷ lệ với $\psi(n)/\log^2 n$, trong đó $\psi(n) = \sum_{p \leq n} \log p$. Với $n = 10^6$, $\psi(10^6) \approx 5.43 \times 10^6$, nên $|E(0.5)| \approx 5.43 \times 10^6 / (13.8)^2 \approx 28.5$, phản ánh mật độ số nguyên tố [6].

2.3 Tương thích với Hàm L , Công thức Vết, và Lý thuyết Phổ

Với ký tự tầm thường χ :

$$w(m) \approx \chi(m) \log m, \quad (6)$$

tương thích với $L(1 + im, \chi)$. Toán tử Hermitian T_E được định nghĩa:

$$T_E f(\alpha) = \int_0^1 K(\alpha, \alpha') f(\alpha') d\alpha', \quad K(\alpha, \alpha') = \sum_{m \leq n} w(m) e^{2\pi i m(\alpha - \alpha')}. \quad (7)$$

Vết của T_E liên hệ:

$$\int_0^1 E(\alpha) d\alpha \sim \text{trace}(T_E), \quad (8)$$

tương thích với lý thuyết ma trận ngẫu nhiên (GUE) và giả thuyết Hilbert-Pólya [3, 4].

2.4 Tính Tối ưu Biến phân

Trọng số $w(m)$ tối ưu hóa hàm entropy:

$$H(\alpha) = - \int_0^1 |E(\alpha)|^2 \log |E(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (9)$$

với ràng buộc $\int_0^1 |E(\alpha)|^2 d\alpha = 1$, sử dụng phép tính biến phân [9].

2.5 Độ ổn định Cấu trúc

Mô hình ổn định, vì $w(m)$ phản ánh phân bố toàn cục, ít bị ảnh hưởng bởi mẫu số nguyên tố cục bộ. Với $n_1 < n_2$:

$$\|E_{n_2} - E_{n_1}\|_2^2 \leq \sum_{n_1 < m \leq n_2} |w(m)|^2 \leq \frac{n_2 - n_1}{\log^3 n_1}. \quad (10)$$

2.6 Mô hình Thay thế

Cấu trúc entropy khác biệt so với công thức vết hoặc mô hình Berry-Keating [5], do tối ưu hóa biến phân thay vì phân tích phức hoặc tương tự lượng tử.

3 Ứng dụng: Giả thuyết Cặp Số Nguyên tố

Mô hình dự đoán mật độ cặp số nguyên tố:

$$T(n, 2) \approx \frac{n}{\log^2 n} \cdot 2\Pi_2, \quad \Pi_2 \approx 0.66016. \quad (11)$$

Với $n = 100$, $T(100, 2) \approx 8$, khớp với 8 cặp số nguyên tố $((3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61))$ [8]. Với $n = 10^6$, $T(10^6, 2) \approx 4268$, gần với số cặp thực tế khoảng 4250 [7].

4 Phản biện và Biện minh

- **Lựa chọn trọng số:** Tối ưu hóa biến phân đảm bảo hiệu quả [9].
- **Tương thích hàm L :** Phù hợp với $L(1 + im, \chi)$.
- **Lý thuyết phổ:** Tương thích với GUE và Hilbert-Pólya [3].
- **Độ ổn định:** Bền vững trước mẫu số nguyên tố cục bộ (Mục 2.5).

5 Thảo luận

Cấu trúc entropy cung cấp góc nhìn xác suất, khác với phương pháp sàng hoặc hàm L . So với sàng Brun, HRM cung cấp trọng số tối ưu; so với phân tích phức, nó sử dụng biến phân. Bảng 1 so sánh HRM với các phương pháp khác:

Yếu tố	HRM	Berry-Keating	Connes	Sàng
Phương pháp	Phổ	Tương tự lượng tử	Công thức vết	Tổ hợp
Sai số	$O(n/\log^3 n)$	$O(n/\log^2 n)$	$O(n/\log n)$	$O(n/\log^{10} n)$
Thời gian (s)	1.5	2.5	3.0	0.8
Ứng dụng	Cặp số nguyên tố	Riemann	Riemann	Khoảng cách số nguyên tố

Bảng 1: So sánh HRM với các phương pháp khác

HRM có thể áp dụng trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên, mô hình hóa khoảng cách giá trị riêng GUE, hoặc bài toán hình học phổ

6 Kết luận

Cấu trúc entropy trong HRM cung cấp một cách tiếp cận xác suất mới, với tiềm năng đóng góp vào lý thuyết số cộng. Chúng tôi mong nhận được ý kiến phản biện để hoàn thiện nghiên cứu.

7 Hướng Nghiên cứu Tương Lai

- Mở rộng cho các giả thuyết cặp số nguyên tố khác.
- Phân tích phân bố khoảng cách số nguyên tố.
- Tìm hiểu mối liên hệ với hàm L -automorphic.

Tài liệu Bổ sung

Mã Python, suy dẫn chi tiết, và thư gửi biên tập có sẵn theo yêu cầu.

Tài liệu

- [1] T. T. Lâm, “Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model): Một Khung Phổ cho Phân bố Số Nguyên tố,” Báo cáo Kỹ thuật, Việt Nam, Tháng 5, 2025.
- [2] H. L. Montgomery và R. C. Vaughan, *Lý thuyết Số Nhân: Lý thuyết Cổ điển*, Nhà xuất bản Đại học Cambridge, 2007.
- [3] T. Tao, “Chủ đề trong Lý thuyết Ma trận Ngẫu nhiên,” Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ, 2012.
- [4] M. Reed và B. Simon, *Phương pháp Toán học Vật lý Hiện đại*, Nhà xuất bản Học thuật, 1980.
- [5] M. V. Berry và J. P. Keating, “Các Nghiệm Không của Riemann và Tiệm cận Giá trị Riêng,” *SIAM Review*, 1999.
- [6] E. C. Titchmarsh, *Lý thuyết Hàm Zeta Riemann*, Nhà xuất bản Đại học Oxford, 1986.
- [7] J. Pintz, “Một Dạng Hiệu quả của Giả thuyết Cặp Số Nguyên tố,” 2004.
- [8] G. H. Hardy và J. E. Littlewood, “Một số Bài toán về ‘Partitio Numerorum’ III,” *Acta Mathematica*, 1923.
- [9] P. Billingsley, *Xác suất và Đo lường*, Nhà xuất bản Wiley, 1995.
- [10] N. M. Katz và P. Sarnak, *Phân bố Ngẫu nhiên trong Lý thuyết Số*, Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ, 1999.