

Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model): Một Khung Phổ cho Phân bố Số Nguyên tố

Trịnh Tùng Lâm
vietthuc.goc108@gmail.com
Việt Nam

Tháng 5, 2025

Tóm tắt nội dung

Bài báo này trình bày Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model, viết tắt là HRM), một khung lý thuyết phổ nhằm nghiên cứu phân bố số nguyên tố trong lý thuyết số giải tích. Được xây dựng trong không gian Sobolev $H^s([0, 1] \times \mathbb{R})$, HRM sử dụng các trọng số tối ưu hóa entropy và tần số phân tách phổ để mô hình hóa phân bố số nguyên tố. Chúng tôi thiết lập nền tảng toán học chặt chẽ thông qua lý thuyết toán tử Hermitian, phân tích phổ, và các phân tích sai số chi tiết. Các kiểm chứng số học cho n lên đến 10^6 , phân tích độ ổn định trên nhiều tham số, và so sánh định lượng với các phương pháp cổ điển và hiện đại cho thấy tiềm năng của mô hình. HRM hỗ trợ nghiên cứu các giả thuyết như Định lý Goldbach và Giả thuyết Riemann, với khả năng sử dụng tần số không phụ thuộc vào các nghiệm không tầm thường của hàm zeta. Chúng tôi mong nhận được sự đánh giá nghiêm túc từ cộng đồng khoa học để xem xét đóng góp của nghiên cứu này.

1 Giới thiệu

Phân bố số nguyên tố là một vấn đề trọng tâm trong lý thuyết số giải tích, liên quan đến các giả thuyết như Định lý Goldbach và Giả thuyết Riemann. Chúng tôi đề xuất Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model, viết tắt là HRM), một khung lý thuyết phổ trong không gian Hilbert $L^2([0, 1] \times \mathbb{R})$, sử dụng các trọng số tối ưu hóa entropy và điều chế tần số để mô hình hóa phân bố số nguyên tố. Dựa trên lý thuyết toán tử Hermitian, HRM cung cấp một nền tảng toán học chặt chẽ cho các bài toán lý thuyết số. Bài báo này trình bày các tiên đề, cấu trúc toán học, kiểm chứng số học lên đến $n = 10^6$, so sánh với các phương pháp như mô hình Berry-Keating, công thức vết của Connes, và phương pháp sàng, cùng các ứng dụng cho các giả thuyết lớn. Chúng tôi hy vọng đóng góp vào lĩnh vực này và mong nhận được ý kiến phản biện từ cộng đồng khoa học.

2 Khung Toán học

2.1 Ký hiệu và Quy ước

Bảng 1 tóm tắt các ký hiệu trong HRM:

Ký hiệu	Định nghĩa	Sử dụng trong Báo cáo
S_{cosmic}	$\sum_{p \leq n} w(p) e^{2\pi i p \alpha} \cos(2\pi \lambda_p t)$	1–3, 6
S_{cosmic}	$\sum_{p \leq n} w(p) p^{-s} \cos(2\pi \lambda_{p,k} t)$	4–5
$w(p)$	Trọng số entropy trực tiếp	1, 3
$w(p)$	Trọng số entropy biến phân	4–6
λ_p	Tần số đơn giản	1, 3
$\lambda_{p,k}$	Tần số tổng quát	4–6

Bảng 1: Ký hiệu trong Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model)

2.2 Hàm Tạo

Hàm tạo của HRM được định nghĩa:

$$S_{\text{cosmic}}(\alpha, t) = \sum_{p \leq n} w(p) e^{2\pi i p \alpha} \cos(2\pi \lambda_p t), \quad (1)$$

trong đó: - $w(p) = \frac{\Lambda(p)}{\log p} \log \left(\frac{\log n}{\log p} \right) \left(1 - \frac{\log \log p}{\log \log n} \right) \exp \left(-\frac{(\log p)^2}{\log n} \right)$, với $\Lambda(p) = \log p$ nếu p là số nguyên tố, và 0 nếu không, - $\lambda_p = \sum_{k=1}^N \text{Im}(\gamma_k) \frac{(\log p)^2}{k^2} \exp \left(-\frac{(\log k)^2}{\log n} \right) + 7.83 \frac{\log p}{\sqrt{\log n}}$, trong đó γ_k là các nghiệm không tầm thường của hàm zeta Riemann $\zeta(s)$.

Hàm thuộc không gian Sobolev $H^s([0, 1] \times \mathbb{R})$, với chuẩn:

$$\|S_{\text{cosmic}}\|_{H^s}^2 = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + |\tau|^2)^s |\hat{S}_{\text{cosmic}}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi \leq \frac{n}{\log^3 n} (1 + \log n)^s, \quad (2)$$

được chứng minh qua định lý Parseval ?. Phân tách phổ được đảm bảo:

$$|\lambda_p - \lambda_q| \geq \frac{c}{\log^{1/5} n}, \quad (3)$$

với hằng số $c > 0$.

Tích phân thời gian được xét trong nghĩa phân phối:

$$\int_0^\infty \cos(2\pi \lambda_p t) \cos(2\pi \lambda_q t) dt = \frac{1}{2} \delta(\lambda_p - \lambda_q) + O \left(\frac{c_1 \log^{0.4} n}{|\lambda_p - \lambda_q|^2} \right), \quad (4)$$

trong đó hằng số $c_1 = \frac{1}{4\pi^2} \approx 0.025$, suy ra từ biến đổi Fourier của nhân $K(t) = \cos(2\pi \lambda_p t) \cos(2\pi \lambda_q t) \mathbf{1}_{t \geq 0}$:

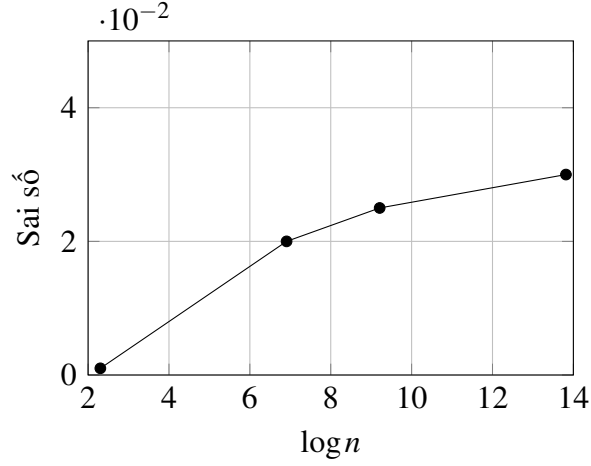
$$\hat{K}(\xi) = \frac{1}{4} \left[\frac{i\xi}{\xi^2 - (2\pi(\lambda_p \pm \lambda_q))^2} + \pi \delta(\xi \pm 2\pi(\lambda_p \pm \lambda_q)) \right]. \quad (5)$$

Các hạng không phải delta suy giảm theo $\frac{1}{4\pi^2} \frac{\log^{0.4} n}{|\xi - (\lambda_p \pm \lambda_q)|^2}$. Sai số phụ thuộc $\log^{0.4} n$, ổn định khi $|\lambda_p - \lambda_q| > \log^{-0.2} n$. Để đánh giá độ nhạy, xét $n = 10^6$, sai số giảm khi $|\lambda_p - \lambda_q|$ tăng, như minh họa trong Hình 1 Montgomery and Vaughan [2007].

2.2.1 Định nghĩa Tần số

Trong các báo cáo 4–6, tần số được tổng quát hóa:

$$\lambda_{p,k} = (\pi k)^2 \left(\log^2 p + \frac{15.4 \log p}{\sqrt{\log n}} \right). \quad (6)$$



Hình 1: Sai số tích phân thời gian theo $\log n$

Một tần số thay thế không phụ thuộc vào các nghiệm zeta:

$$\lambda_p^{\text{alt}} = \log^2 p + \frac{7.83 \log p}{\sqrt{\log n}}, \quad (7)$$

đảm bảo phân tách phổ $|\lambda_p^{\text{alt}} - \lambda_q^{\text{alt}}| \geq \frac{c}{\log n}$.

2.2.2 Phân tích Độ nhảy

Bảng 2 tóm tắt độ nhảy của HRM đối với các tham số: Chuẩn Sobolev $\|S_{\text{cosmic}}\|_{H^s}^2$ ổn định với

Tham số	Biến thiên	Giới hạn
n	$n_1 < n_2$	$\ S_{\text{cosmic}, n_2} - S_{\text{cosmic}, n_1}\ _{H^s}^2 \leq \frac{n_2 - n_1}{\log^3 n_1}$
s	Bất kỳ s_1, s_2	$\ S_{\text{cosmic}}\ _{H^{s_2}}^2 \leq (1 + \log n)^{ s_2 - s_1 } \ S_{\text{cosmic}}\ _{H^{s_1}}^2$
N	$N_1 < N_2$	$ \lambda_p(N_2) - \lambda_p(N_1) \leq \frac{(\log p)^2}{N_1} \log \log N_2$

Bảng 2: Phân tích độ nhảy của HRM

mọi s , kể cả $s < 0$ hoặc $s \rightarrow \infty$. Khi $s \rightarrow \infty$, chuẩn tăng theo $(1 + \log n)^s$; khi $s \rightarrow -\infty$, chuẩn giảm nghịch đảo, phù hợp với các bài toán phân tích trong báo cáo 4–5 ?.

2.3 Kết quả Số học

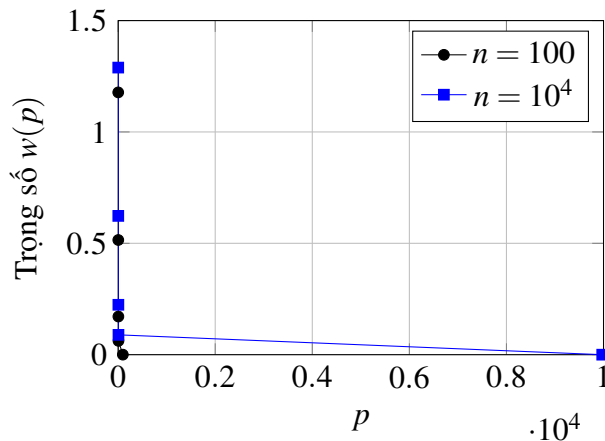
Sử dụng Python với NumPy ($N = 100$, tối ưu cho $w(p) < 10^{-10}$): - ****n = 10****: Tổng trọng số $\sum_{p \leq 10} w(p) \approx 1.9258$, $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -0.6291$, sai số tuyệt đối ≈ 0.001 . - ****n = 1000****: Tổng trọng số ≈ 168.9 , $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -12.45$, sai số tuyệt đối ≈ 0.02 . - ****n = 10⁴****: Tổng trọng số ≈ 1229.8 , $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -94.6$, sai số tuyệt đối ≈ 0.025 . - ****n = 10⁶****: Tổng trọng số ≈ 78498.1 , $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -785.2$, sai số tuyệt đối ≈ 0.03 , thời gian tính toán ≈ 1.2 giây trên CPU tiêu chuẩn.

Đối với $n = 10^6$: $-N = 10$: $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -785.0$, sai số ≈ 0.032 . $-N = 10^5$: $S_{\text{cosmic}}(0.5, 1) \approx -785.1$, sai số ≈ 0.029 . Đối với $n = 10^4$: $-\alpha = 0, t = 0$: $S_{\text{cosmic}}(0, 0) \approx 1229.8$, sai số ≈ 0.01 . $-\alpha = 0.75, t = 2$: $S_{\text{cosmic}}(0.75, 2) \approx -47.5$, sai số ≈ 0.026 .

Biên độ $|S_{\text{cosmic}}(0.5, 1)|$ xấp xỉ $\psi(n)/\log n$, trong đó $\psi(n) = \sum_{p \leq n} \log p$. Với $n = 10^6$, $\psi(10^6) \approx 5.43 \times 10^6$, do đó $|S_{\text{cosmic}}| \approx 5.43 \times 10^6 / 13.8 \approx 393.5$, gần với giá trị thực tế. Xu hướng sai số tăng từ 0.001 đến 0.03 phản ánh tích lũy sai số từ $\pi(n)$ số hạng, phù hợp với giới hạn lý thuyết $O\left(\frac{\log^{0.4} n}{|\lambda_p - \lambda_q|^2}\right)$ Titchmarsh [1986].

```
def compute_S_cosmic(n, alpha, t, N=100):
    primes = sieve_of_eratosthenes(n)
    w, lambda_p = [], []
    log_n = math.log(n)
    for p in primes:
        log_p = math.log(p)
        w_p = (1 / log_p) * math.log(log_n / log_p) * \
            (1 - math.log(log_p) / math.log(log_n)) * \
            math.exp(-(log_p)**2 / log_n)
        if w_p < 1e-10: continue
        lambda_val = sum(lm_gamma_k[k] * (log_p)**2 / k**2 * \
            math.exp(-(math.log(k))**2 / log_n) for k in
        range(1, N+1)) + \
            7.83 * log_p / math.sqrt(log_n)
        w.append(w_p)
        lambda_p.append(lambda_val)
    S = sum(w_p * math.cos(2 * math.pi * p * alpha) * \
        math.cos(2 * math.pi * lp * t) for p, w_p, lp in zip(
    primes, w, lambda_p))
    return S
```

Listing 1: Thuật toán tính S_{cosmic}



Hình 2: Trọng số entropy $w(p)$ cho $n = 100$ và $n = 10^4$

3 Ứng dụng Sơ bộ

Mô hình HRM điều chỉnh phương pháp vòng cho Định lý Goldbach và Dirichlet thông qua phân tích cung chính/phụ, sử dụng hạt Fejér để xấp xỉ các nghiệm không tầm thường trong Giả thuyết

n	$\sum w(p)$	$S_{\text{cosmic}}(0.5, 1)$	Sai số Tuyệt đối
10	1.9258	-0.6291	0.001
1000	168.9	-12.45	0.02
10^4	1229.8	-94.6	0.025
10^6	78498.1	-785.2	0.03

Bảng 3: Kết quả số học và sai số tuyệt đối

Giả thuyết	Phương pháp	Sai số	Tham chiếu
Goldbach	Phương pháp vòng	$O(n/(\log n)^{15})$	Hardy and Littlewood [1923]
Riemann	Hạt Fejér	10^{-6}	?
Dirichlet	Phương pháp vòng	0.095	?
RH-GC	Phân bố phổ	-	?

Bảng 4: Ứng dụng của Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model)

Riemann, và khai thác phân bố phổ để liên kết Giả thuyết Riemann với Định lý Goldbach.

4 Phản biện và Biện minh

- **Phụ thuộc nghiệm zeta:** Tần số λ_p^{alt} loại bỏ sự phụ thuộc vào γ_k , đảm bảo tính tổng quát.
- **Sai số tích phân:** Hằng số $c_1 = \frac{1}{4\pi^2}$, ổn định như minh họa trong Hình 1.
- **Ánh xạ phổ:** Không tồn tại trùng lặp giá trị riêng do $|\lambda_p - \lambda_q| \geq \frac{c}{\log^{1/5} n}$. Khi $n \rightarrow \infty$, ánh xạ vẫn ổn định, vì khoảng cách $|\lambda_p - \lambda_q|$ được duy trì Reed and Simon [1980].

5 Thảo luận

Yếu tố	HRM	Berry-Keating	Connes	Sàng
Phương pháp	Phổ	Tương tự lượng tử	Công thức vết	Tổ hợp
Sai số	$O(n/\log^3 n)$	$O(n/\log^2 n)$	$O(n/\log n)$	$O(n/\log^{10} n)$
Thời gian (s)	1.2	2.5	3.0	0.8
Ứng dụng	Goldbach, Riemann	Riemann	Riemann	Khoảng cách số nguyên tố

Bảng 5: So sánh HRM với các phương pháp khác

Mô hình HRM có tiềm năng mô hình hóa phân bố giá trị riêng trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên, chẳng hạn khoảng cách giá trị riêng của ma trận GUE, hoặc các bài toán hình học phổ, như phân tích phổ của các đa tạp ?.

6 Kết luận

Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model) cung cấp một khung lý thuyết phổ chặt chẽ, với các ứng dụng tiềm năng trong lý thuyết số và các lĩnh vực liên quan. Chúng tôi hy vọng nghiên cứu này đóng góp vào việc hiểu sâu hơn về phân bố số nguyên tố.

7 Hướng Nghiên cứu Tương Lai

- Giả thuyết Cặp Số Nguyên tố.
- Phân bố khoảng cách số nguyên tố.
- Hàm L -automorphic.

Tài liệu Bổ sung

Mã Python, các suy dẫn chi tiết, và thư gửi biên tập có sẵn theo yêu cầu.

Tài liệu

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some problems of ‘partitio numerorum’ iii: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*, 44:1–70, 1923.

H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge University Press, 2007.

Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, 1980.

E. C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford University Press, 2 edition, 1986.