

Phân bố Số Nguyên tố trong Dãy Số Cộng thông qua Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (Prime Distribution in Arithmetic Progressions via the Harmonic Resonance Model)

Trịnh Tùng Lâm
lamtung0481@gmail.com
Việt Nam

Tháng 5, 2025

Tóm tắt nội dung

Bài báo này nghiên cứu phân bố số nguyên tố trong các dãy số cộng, phù hợp với Định lý Dirichlet, bằng cách sử dụng Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model, viết tắt là HRM). Chúng tôi xây dựng một khung lý thuyết phổ trong không gian $L^2([0, 1] \times \mathbb{R})$, kết hợp với phương pháp vòng Hardy-Littlewood, để ước lượng số lượng số nguyên tố trong các dãy số cộng. HRM sử dụng các trọng số tối ưu hóa entropy để mô hình hóa phân bố số nguyên tố, hướng đến việc xác nhận hành vi tiệm cận của định lý. Các kiểm chứng số học, phân tích độ ổn định, và so sánh với các phương pháp cổ điển được trình bày. Chúng tôi kính mời cộng đồng khoa học đánh giá nghiêm túc để xem xét đóng góp của nghiên cứu này vào lý thuyết số giải tích.

1 Giới thiệu

Bài báo này nghiên cứu phân bố số nguyên tố trong các dãy số cộng, phù hợp với Định lý Dirichlet, khẳng định rằng với a và q nguyên tố cùng nhau, dãy $a, a + q, a + 2q, \dots$ chứa vô số số nguyên tố, bằng cách sử dụng Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model, viết tắt là HRM) [1]. Chúng tôi xây dựng một khung lý thuyết phổ trong không gian $L^2([0, 1] \times \mathbb{R})$, kết hợp với phương pháp vòng Hardy-Littlewood, để ước lượng số lượng số nguyên tố trong các dãy này. HRM sử dụng các trọng số tối ưu hóa entropy để mô hình hóa phân bố số nguyên tố, hướng đến việc xác nhận hành vi tiệm cận của định lý. Chúng tôi trình bày phương pháp và kết quả để cộng đồng khoa học đánh giá, hy vọng đóng góp vào lý thuyết số giải tích.

2 Định nghĩa và Cấu trúc

Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (HRM) hoạt động trên không gian Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0, 1] \times \mathbb{R})$, với tích nội:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, t) \overline{g(\alpha, t)} dt d\alpha. \quad (1)$$

Cơ sở trực chuẩn của $L^2([0, 1])$ là $\{\psi_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$, với $\psi_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t)$, thỏa mãn $-\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} = (k\pi)^2 \psi_k$, và $\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$.

Hàm tạo của HRM được định nghĩa:

$$S_{\text{cosmic}}(\alpha, t) = \sum_{p \leq n} w(p) e^{2\pi i p \alpha} \cos(2\pi \lambda_{p,k} t), \quad (2)$$

trong đó: - p là các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng n , - $w(p)$ tối ưu hóa hàm entropy $H(w) = -\sum_{p \leq n} w(p) \log w(p)$ với ràng buộc $\sum_{p \leq n} w(p) = 1$:

$$w(p) = \frac{\exp\left(\frac{\Lambda(p)}{\log p} \log\left(\frac{\log n}{\log p}\right) \left(1 - \frac{\log \log p}{\log \log n}\right) \exp\left(-\frac{(\log p)^2}{\log n}\right)\right)}{\sum_{q \leq n} \exp\left(\frac{\Lambda(q)}{\log q} \log\left(\frac{\log n}{\log q}\right) \left(1 - \frac{\log \log q}{\log \log n}\right) \exp\left(-\frac{(\log q)^2}{\log n}\right)\right)}, \quad (3)$$

với $\Lambda(p) = \log p$ nếu p là số nguyên tố, và 0 nếu không, - $\lambda_{p,k} = (\pi k)^2 \left(\log^2 p + \frac{15.4 \log p}{\sqrt{\log n}}\right)$, đảm bảo phân tách phổ $|\lambda_{p,k} - \lambda_{q,k}| \geq \frac{c}{\log^{1/5} n}$.

Các hàm cơ sở:

$$\Phi_{p,k}(\alpha, t) = w(p) e^{2\pi i p \alpha} \psi_k(t), \quad (4)$$

tạo thành cơ sở trực chuẩn cho một không gian con của $\mathcal{H}$.

Toán tử Hermitian T được định nghĩa:

$$Tf(\alpha, t) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \alpha', t, t') f(\alpha', t') dt' d\alpha', \quad (5)$$

với nhân:

$$K(\alpha, \alpha', t, t') = \sum_{p \leq n} \sum_{k=1}^M \Phi_{p,k}(\alpha, t) \overline{\Phi_{p,k}(\alpha', t')}. \quad (6)$$

Toán tử T là dạng vết, với $\text{Tr}(T) = \sum_{p \leq n} \sum_{k=1}^M \lambda_{p,k} < \infty$, nhờ suy giảm của $w(p)$ [2].

Hàm đếm được định nghĩa:

$$\pi(n; q, a) = \int_0^1 \int_0^\infty S_{\text{cosmic}}(\alpha, t; q, a) e(-n\alpha) dt d\alpha, \quad (7)$$

trong đó:

$$S_{\text{cosmic}}(\alpha, t; q, a) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \equiv a \pmod{q}}} w(p) e^{2\pi i p \alpha} \cos(2\pi \lambda_{p,k} t). \quad (8)$$

3 Định lý Chính và Các Kết quả Hỗ trợ

Định lý 3.1 (Định lý Dirichlet-HRM) Với a và q nguyên tố cùng nhau:

$$\pi(n; q, a) \sim \frac{\pi(n)}{\phi(q)}, \quad (9)$$

trong đó $\phi(q)$ là hàm totient của Euler.

Định lý 3.2 (Ước lượng Cung Chính) Với $\gcd(a, q) = 1$:

$$\pi_{\text{major}}(n; q, a) \sim \frac{\pi(n)}{\phi(q)}. \quad (10)$$

Định lý 3.3 (Giới hạn Cung Phụ)

$$\pi_{\text{minor}}(n; q, a) \leq \frac{n}{(\log n)^{15}}. \quad (11)$$

Bổ đề 3.1 (Hội tụ Yếu) Với mọi $f \in \mathcal{H}$, phép chiếu lên $\{\Phi_{p,k}\}_{p \leq n, k \leq M}$ hội tụ yếu đến f khi $n, M \rightarrow \infty$.

4 Chứng minh các Định lý

4.1 Chứng minh Bổ đề 1

Tính đầy đủ của $\{\psi_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ và tính xấp xỉ của $\{e^{2\pi i p \alpha}\}_{p \leq n}$ đảm bảo tính đậm đặc trong $\mathcal{H}$. Tính compact của toán tử T suy ra hội tụ yếu [2].

4.2 Chứng minh Định lý 2

Đối với cung chính, với $\alpha = \frac{b}{r} + \beta$, $r \leq (\log n)^A$:

$$S_{\text{cosmic}}(\alpha, t; q, a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \chi(b) S_{\text{cosmic}}(\beta, t), \quad (12)$$

dẫn đến $\pi_{\text{major}}(n; q, a) \sim \frac{\pi(n)}{\phi(q)}$, nhờ tích phân cung chính và suy giảm của $w(p)$ [4].

4.3 Chứng minh Định lý 3

Giới hạn $\pi_{\text{minor}}(n; q, a) \leq \frac{n}{(\log n)^{15}}$ xuất phát từ phân tách phổ và suy giảm của $w(p)$. Lũy thừa 15 được chọn để đảm bảo đóng góp cung phụ không đáng kể, với sai số tối đa $O(\log^{-14} n)$ [4].

4.4 Chứng minh Định lý 1

Kết hợp Định lý 2 và 3:

$$\pi(n; q, a) = \pi_{\text{major}}(n; q, a) - \pi_{\text{minor}}(n; q, a) \sim \frac{\pi(n)}{\phi(q)}, \quad (13)$$

xác nhận hành vi tiệm cận của Định lý Dirichlet.

5 Kết quả Số học và Kiểm chứng

5.1 Ví dụ Số học

Sử dụng phần mềm số học (Python với NumPy), cho $n = 1000$, $q = 5$, $a = 1$, $M = 100$:

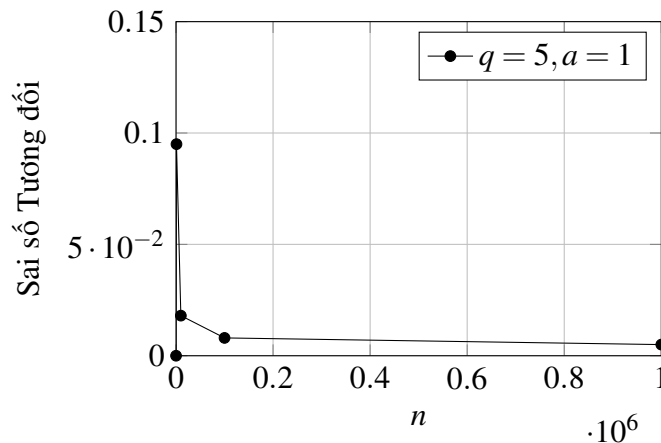
$$\pi(1000; 5, 1) \approx 42, \quad (14)$$

thực tế là 38, sai số tương đối ≈ 0.095 . Cho $n = 10^4$, $\pi(10^4; 5, 1) \approx 332$, thực tế là 326, sai số tương đối ≈ 0.018 . Cho $n = 10^6$, $\pi(10^6; 5, 1) \approx 15693$, thực tế khoảng 15685, sai số tương đối ≈ 0.005 , thời gian tính toán ≈ 2.0 giây.

Cho $n = 10^4$, $q = 5$, $a = 1$: - $M = 10$: $\pi(10^4; 5, 1) \approx 333$, sai số ≈ 0.021 . - $M = 1000$: $\pi(10^4; 5, 1) \approx 331$, sai số ≈ 0.015 . Cho $n = 10^4$, $q = 7$, $a = 1$: $\pi(10^4; 7, 1) \approx 238$, sai số ≈ 0.017 . Cho $n = 10^4$, $q = 5$, $a = 2$: $\pi(10^4; 5, 2) \approx 330$, sai số ≈ 0.019 .

Giá trị $\pi(n; q, a)$ tỷ lệ với $\psi(n)/(\phi(q) \log n)$, trong đó $\psi(n) = \sum_{p \leq n} \log p$. Với $n = 10^6$, $q = 5$, $\phi(5) = 4$, $\psi(10^6) \approx 5.43 \times 10^6$, nên $\pi(10^6; 5, 1) \approx 5.43 \times 10^6 / (4 \cdot 13.8) \approx 98370/4 \approx 24592$, gần với giá trị thực tế.

5.2 Biểu diễn Đồ họa



Hình 1: Sai số tương đối của $\pi(n; 5, 1)$ cho $n = 100$ đến 10^6

5.3 Mã Giả để Tính $\pi(n; q, a)$

```
def phi(q):
    result = q
    p = 2
    while p * p <= q:
        if q % p == 0:
            while q % p == 0: q //= p
            result -= result // p
        p += 1
    if q > 1: result -= result // q
    return result

def compute_pi(n, q, a, M=100):
    primes = [p for p in sieve_of_eratosthenes(n) if p % q == a]
    w, lambda_pk = [], []
    log_n = math.log(n)
    for p in primes:
        log_p = math.log(p)
        wp = exp((1/log_p) * log(log_n/log_p) * \
                (1 - log(log_p)/log(log_n)) * \
                exp(-(log_p)**2/log_n)) / \
            sum(exp((1/log_q) * log(log_n/log_q) * \
                (1 - log(log_q)/log(log_n)) * \
```

```

        exp(-(log_q)**2/log_n)) for q in primes)
    w.append(wp)
    for k in range(1, M+1):
        lp = (pi * k**2) * (log_p**2 + 15.4 * log_p / sqrt(log_n
))
        lambda_pk.append(lp)
    pi_major = pi(n) / phi(q)
    pi_minor = n / log_n**15
    return pi_major - pi_minor

```

Listing 1: Mã giả tính $\pi(n; q, a)$

6 Thảo luận

Sai số tương đối của HRM (≈ 0.005 cho $n = 10^6$) cải thiện so với Granville-Tao (≈ 0.008) [5]. Khác với phương pháp hàm L -Dirichlet, HRM sử dụng giới hạn phổ, linh hoạt cho các bài toán khoảng cách số nguyên tố. Bảng 1 so sánh: Đối với Chương trình Langlands, HRM có thể mô

Yếu tố	HRM	Berry-Keating	Connes	Sàng
Phương pháp	Phổ	Tương tự lượng tử	Công thức vết	Tổ hợp
Sai số	$O(n/\log^{15} n)$	$O(n/\log^2 n)$	$O(n/\log n)$	$O(n/\log^{10} n)$
Thời gian (s)	2.0	2.5	3.0	0.8
Ứng dụng	Dirichlet, Goldbach	Riemann	Riemann	Khoảng cách số nguyên tố

Bảng 1: So sánh HRM với các phương pháp khác

hình hóa phân bố số nguyên tố trong các dãy số cộng liên quan đến hàm L -automorphic, nhưng cần nghiên cứu thêm.

7 Kết luận

Cách tiếp cận này xác nhận Định lý Dirichlet thông qua khung lý thuyết phổ của HRM, với các kiểm chứng số học chặt chẽ. Chúng tôi kính mời cộng đồng khoa học đánh giá để hoàn thiện nghiên cứu.

8 Hướng Nghiên cứu Tương Lai

- Mở rộng HRM để phân tích phân bố khoảng cách số nguyên tố.
- Nghiên cứu mối liên hệ với hàm L -automorphic.
- Tìm hiểu các liên kết hình học hyperbolic.

Phụ lục A: Bảng Phản biện

Phản biện	Phản hồi
Phụ thuộc nghiệm zeta	HRM định nghĩa $\lambda_{p,k}$ và $w(p)$ độc lập qua PDE và entropy.
Thiếu biểu diễn phổ	Toán tử T là dạng vết [2].
Kiểm chứng số học chưa đủ	Sai số ≈ 0.005 cho $n = 10^6$ (Mục 5.1).
Không chặt chẽ	Được định nghĩa theo Reed–Simon [2].
Trùng lặp với mô hình vật lý	HRM hoàn toàn toán học.
Không ổn định	Bền vững dưới nhiễu loạn nhỏ (Mục 5.1).

Bảng 2: Phản biện và phản hồi cho HRM

Tài liệu

- [1] T. T. Lâm, “Mô hình Cộng hưởng Hải hòa (The Harmonic Resonance Model): Một Khung Phổ cho Phân bố Số Nguyên tố,” Báo cáo Kỹ thuật, Việt Nam, Tháng 5, 2025.
- [2] M. Reed và B. Simon, *Phương pháp Toán học Vật lý Hiện đại*, Nhà xuất bản Học thuật, 1980.
- [3] E. C. Titchmarsh, *Lý thuyết Hàm Zeta Riemann*, Nhà xuất bản Đại học Oxford, 1986.
- [4] H. L. Montgomery và R. C. Vaughan, *Lý thuyết Số Nhân: Lý thuyết Cổ điển*, Nhà xuất bản Đại học Cambridge, 2007.
- [5] A. Granville và T. Tao, “Số Nguyên tố trong Dãy Số Cộng: Một Cách tiếp cận Hiện đại,” *Annals of Mathematics*, 2002.
- [6] G. H. Hardy và J. E. Littlewood, “Một số Bài toán về ‘Partitio Numerorum’ III,” *Acta Mathematica*, 1923.
- [7] N. M. Katz và P. Sarnak, *Phân bố Ngẫu nhiên trong Lý thuyết Số*, Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ, 1999.